MA2115 Clase 4: Series alternantes. Convergencia absoluta.

Elaborado por los profesores
Edgar Cabello y Marcos González

1 Series Alternantes

Definicion 1 *Sea $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de términos positivos. Una serie de la forma*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - \cdots + (-1)^{n+1}a_n + \cdots$$

es llamada una serie alternante.

Observemos que $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_{n+1}$ es una serie alternante.

Teorema 1 (Criterio de Leibnitz) *Sea $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ una serie alternante tal que $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente. Entonces, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge si, y sólo si, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Proof: Es claro que, si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ converge, su término general tiende a cero y, en consecuencia, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} |(-1)^{n+1}a_n| = 0$.

Recíprocamente, supongamos que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Consideremos la serie telescópica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$. Como la sucesión $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ es decreciente y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, tenemos que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n+1})$ es una serie de términos positivos y converge al valor a_1. Por lo tanto, cada una de sus subseries converge y, en particular, la subserie de términos impares $sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n})$. Finalmente, observemos que

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n}) &= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_{2k-1} - a_{2k}) = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}a_k - \sum_{k=1}^{n} a_{2k}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k}a_{2k-1}a_k + \sum_{k=1}^{n}(-1)^{2k+1}a_{2k}\right)\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{2n}(-1)^{j+1}a_j = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n.
\end{aligned}$$

Es decir, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = \sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1} - a_{2n})$ y por lo tanto converge. $\square$

Observemos, además, que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k - a_{k-1})$ converge a a_{n+1}, siempre que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, de donde

$$|S - s_n| = \left|\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k\right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty}(a_k - a_{k-1}) = a_{n+1},$$

y así, obtenemos el siguiente:

Corolario 1 *Sea* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ *una serie alternante convergente a* S*. Entonces, el error al aproximar la suma* S*, mediante la* n*-ésima suma parcial* s_n*, no excede* a_{n+1}*, es decir,* $|S - s_n| \leq a_{n+1}$*, para cada* $n \geq 1$*.*

Ejemplo 1 *Demuestre que la serie* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}$ *converge, y encuentre una valor aproximado de la serie con un error no mayor a* $\dfrac{1}{4}$*.*

Solución: Consideremos la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2^x}$. Como

$$f'(x) = \frac{2x2^x - x^2(\ln 2)2^x}{2^{2x}} = \frac{x2^x(2 - x\ln 2)}{2^{2x}}$$

tenemos que $f'(x) < 0$ siempre que $2 - x\ln 2 < 0$, o cual se cumple siempre que $x > \dfrac{2}{\ln 2}$. Es decir, la función f es creciente en el intervalo $\left(\dfrac{2}{\ln 2}, \infty\right)$, y como $\dfrac{2}{\ln 2} < 4$ (ya que $e < 4 = 2^2$, de donde $1 < 2\ln 2$), tenemos que la sucesión $a_n := \dfrac{n^2}{2^n}$, es creciente a partir de $n = 4$ (de hecho, a partir de $n = 3$, ya que $a_3 = \frac{9}{8} > 1 = a_4$). En virtud del Criterio de Leibnitz, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^2}{2^n}$ converge a un valor S. El Corolario 1 nos dice entonces que $|S - s_n| \leq a_{n+1} = \dfrac{(n+1)^2}{2^{n+1}}$, y substituyendo $n = 7$, obtenemos que $|S - s_7| \leq \dfrac{8^2}{2^8} = \dfrac{1}{4}$. Es decir, podemos aproximar S mediante

$$s_7 = \sum_{k=1}^{7}(-1)^{k+1}\frac{k^2}{2^k} = \frac{1}{2} - 1 + \frac{9}{8} - 1 + \frac{25}{32} - \frac{9}{16} + \frac{49}{128} = \frac{29}{128},$$

con un error no mayor a $\dfrac{1}{4}$. $\square$

2 Convergencia Absoluta

Definicion 2 *Decimos que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente o es absolutamente convergente si* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge.*

Teorema 2 *Toda serie absolutamente es convergente. Es decir, si la serie de términos positivos* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *converge, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge.*

Demostración: En virtud del criterio de Cauchy, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge si, y sólo si, para cada $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| < \varepsilon$ siempre que $m > n > N$. Ahora bien, como $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge, el criterio de Cauchy nos dice que dado $\varepsilon > 0$ existe $N > 0$ tal que $||a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m|| < \varepsilon$ siempre que $m > n > N$, y la desigualdad triangular nos dice que

$$|a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_m| \le |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \cdots + |a_m| < \varepsilon,$$

con lo cual $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. □

A partir de este resultado podemos deducir fácilmente los criterios basados en la comparación con una serie geométrica.

Corolario 2 (Criterio del cociente) *Si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *es una serie de términos positivos y el límite* $R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ *existe, entonces* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge siempre que* $R < 1$ *y diverge siempre que* $R > 1$.

Ejemplo 2 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n!}$ *converge absolutamente, ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1^{n+1}) \frac{(n+1)^3}{(n+1)!}}{(-1)^n \frac{n^3}{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3 n!}{n^3 (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} \frac{n!}{(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

Corolario 3 (Criterio de la raíz) *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie de términos positivos tales que* $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = R$ *existe. Entonces,* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge siempre que* $R < 1$ *y diverge siempre que* $R > 1$.

Ejemplo 3 *La serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{2n}{n+1}\right)^n$ *converge, ya que*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\left(-\frac{2n}{n+1}\right)^n\right|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left|\frac{2n}{n+1}\right|^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{n+1} = \frac{1}{2} < 1.$$

.

También tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3 *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie absolutamente convergente. Entonces, cada reordenamiento y cada subserie de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge absolutamente.*

3 Convergencia Condicional

Definicion 3 *Decimos que una serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge condicionalmente, o es condicionalmente convergente, si* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge pero* $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ *diverge, es decir, si es convergente pero no absolutamente convergente.*

Ejemplo 4 *Hemos visto que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *porque es una serie alternada cuyo término general tiende a cero, mientras que la serie armónica* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge. Por lo tanto,* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *converge condicionalmente.*

Ejemplo 5 *Más generalmente, la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ *es absolutamente convergente si* $p > 1$*, condicionalmente convergente si* $0 < p \leq 1$ *y divergente si* $p < 0$*.*

Para culminar esta clase, enunciamos sin demostración el siguiente teorema de Riemann, el cual muestra el contraste entre el comportamiento de la convergencia absoluta y condicional con respecto a los reordenamientos.

Teorema 4 *Sea* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *una serie condicionalmente convergente. Entonces, para cada* $\alpha \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$*, algún reordenamiento de* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge a* α*. Es decir, existe una permutación (no necesariamente única) de los números naturales* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tal que* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{\sigma(k)} = \alpha$*.*

Correcciones: Boris Iskra

May 13, 2008